

Modèles transitionnels de la relativité d'échelle

Le V10/08/2012

Maxime Forriez

On suppose que l'on a effectué une analyse fractale par comptage de boîtes sur un nuage de points ($D_T = 0$). Dans ce type d'analyse par comptage de boîtes, et uniquement dans ce cas, les mesures donnent toujours la valeur de la dimension fractale (ou non fractale) directement.

Tous les paramètres sont identiques pour les trois cas étudiés.

$$N_0 = 1 \text{ [nombre de boîtes minimal]}$$

N.B. Dans un vrai calcul, on prend plutôt le nombre de boîtes maximal. Cela a des conséquences mathématiques sur la forme des solutions présentées ici. Il ne faudra pas prendre ces solutions, mais leur inverse. Néanmoins, afin de ne pas avoir de formes d'équation trop complexes, on conservera cette hypothèse.

$$\varepsilon_0 = 1 \text{ (m) [échelle de coupure]}$$

$$\varepsilon_{\min} = 0,01 \text{ (m)}$$

$$\varepsilon_{\max} = 50\,000 \text{ (m)}$$

$$D = 1,5$$

$$D_T = 0$$

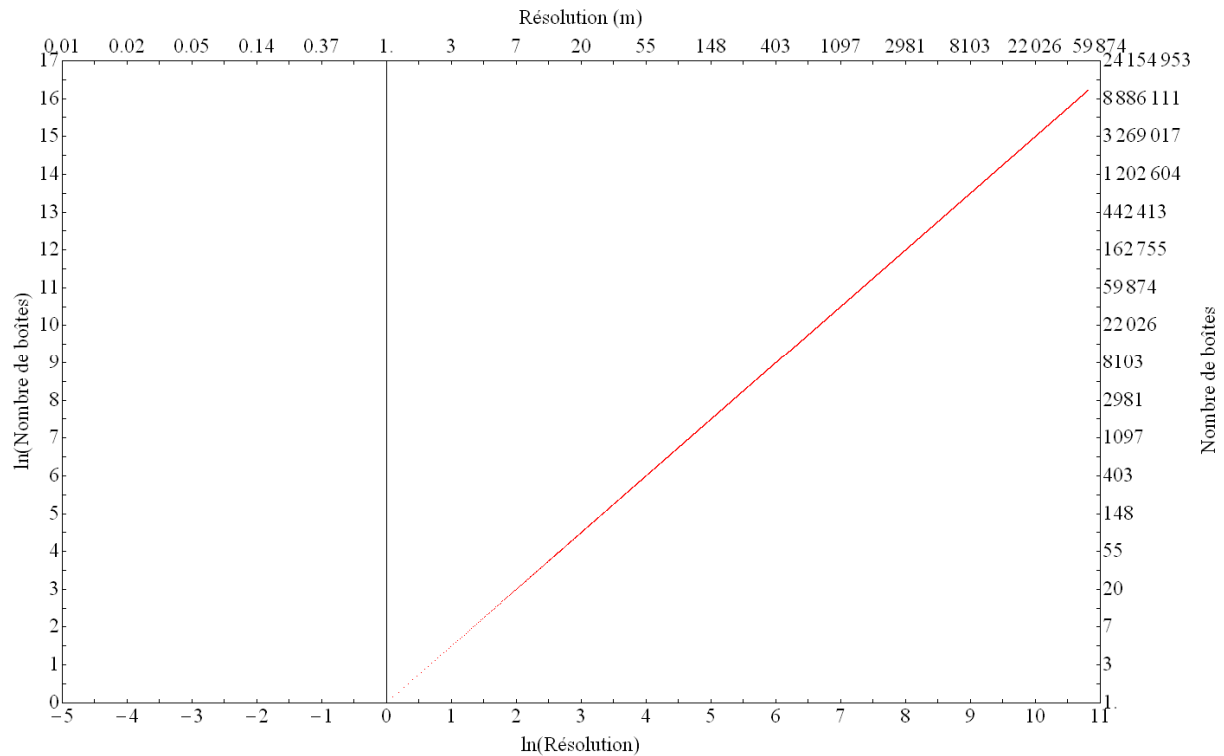
N.B. La forme simple des équations obtenues est issue de cette condition. Si $D_T > 0$, alors un terme supplémentaire doit être ajouté. Cela pourra faire l'objet d'une autre fiche le cas échéant. Cette précision est fondamentale, car, en utilisant ces solutions, on ne peut pas caler les paramètres obtenus pour un objet de type « ligne » ou « surface ».

Cas 1. Le modèle sans transition : l'invariance d'échelle

Équation différentielle : $\frac{dN}{d \ln \varepsilon} = bN$

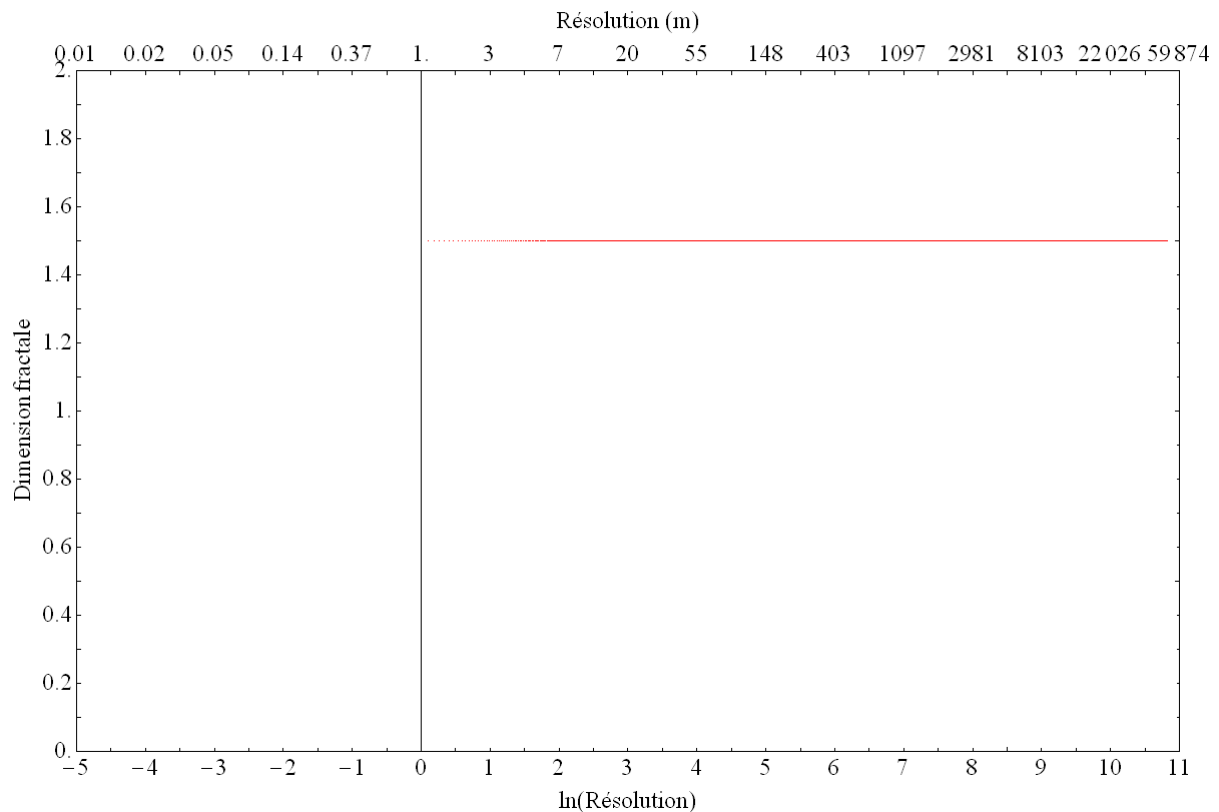
Solution : $N(\varepsilon) = N_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{-D}$

N.B. La valeur de ε_0 n'a aucune espèce d'importance dans ce cas, et uniquement dans ce cas.
ln(Résolution) vs ln(Nombre de boîtes)



N.B. Pour rendre crédible l'hypothèse du comptage de boîte, les nombres de boîtes inférieures à zéro ont été éliminés.

ln(Résolution) vs dimension fractale



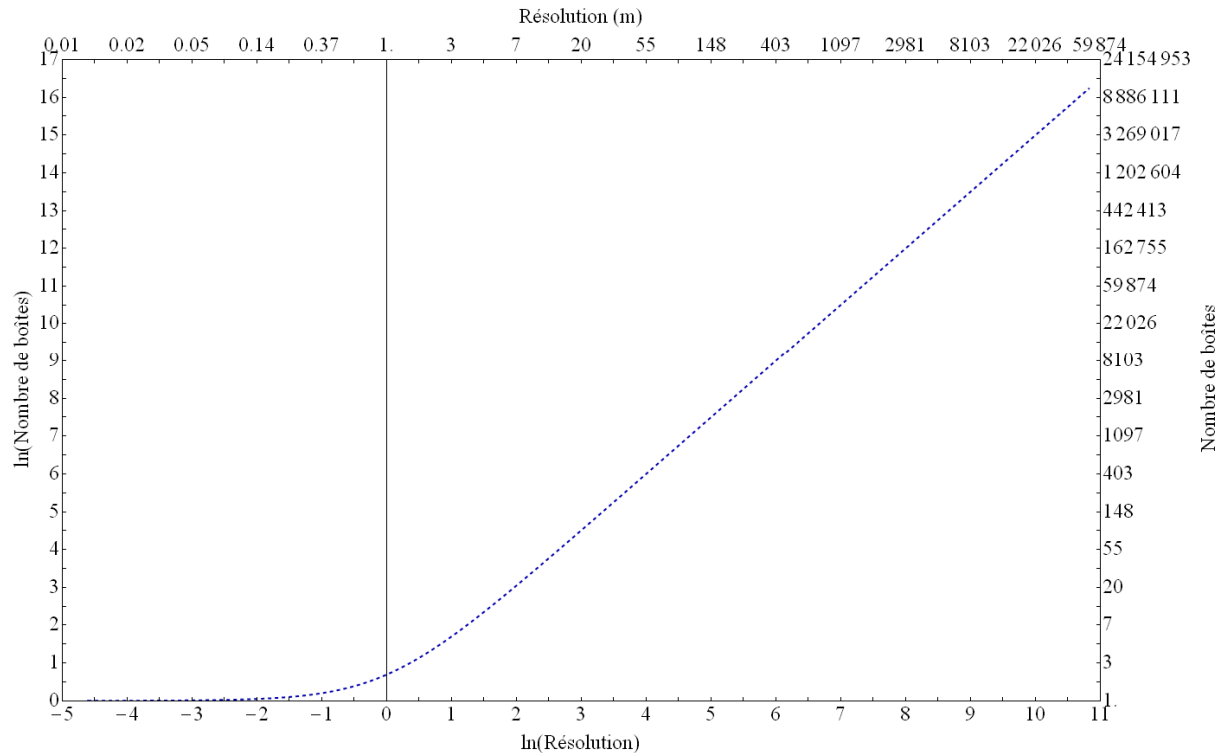
La dérivée montre une dimension fractale strictement constante.

Cas 2. Le modèle avec une transition non fractal-fractal

Équation différentielle : $\frac{dN}{d \ln \varepsilon} = a + bN$

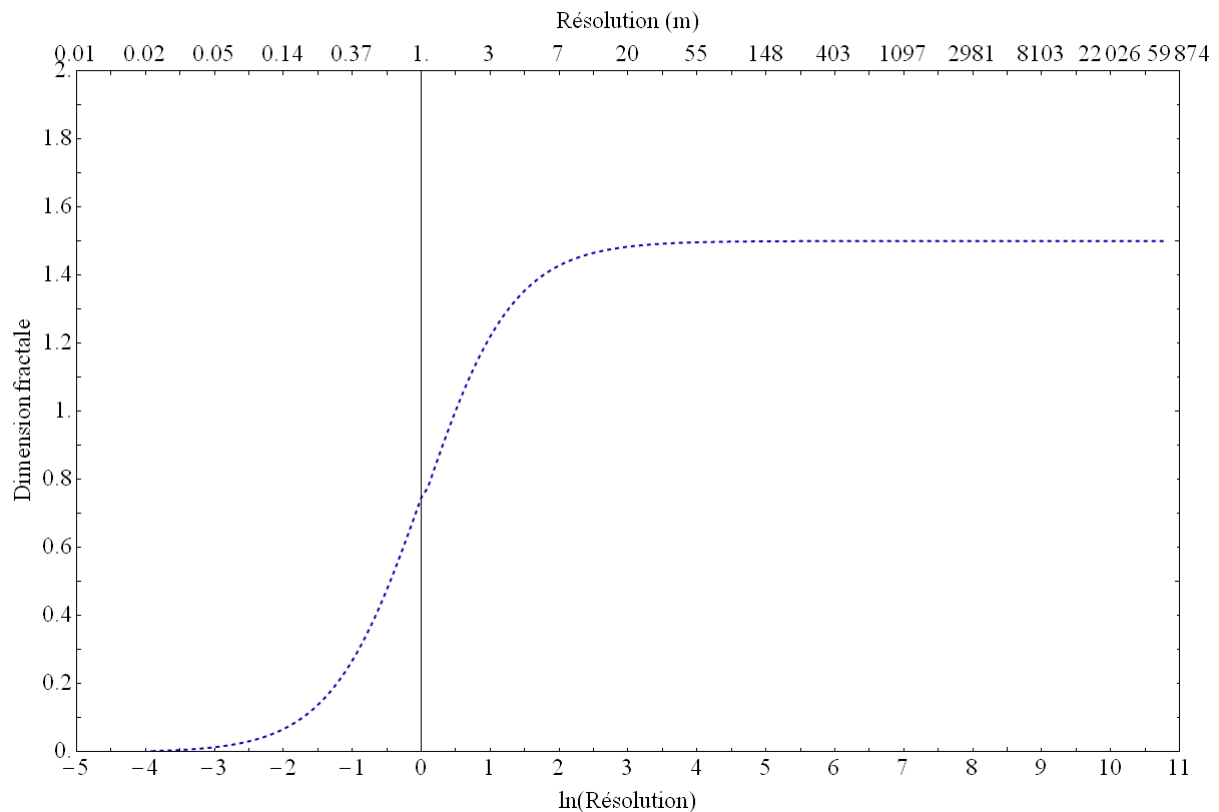
Solution : $N(\varepsilon) = N_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{-D} \right]$

$\ln(\text{Résolution})$ vs $\ln(\text{Nombre de boîtes})$



N.B. Ici, nul besoin de stopper le comptage, le modèle transitionnel se limite de lui-même.

$\ln(\text{Résolution})$ vs dimension fractale



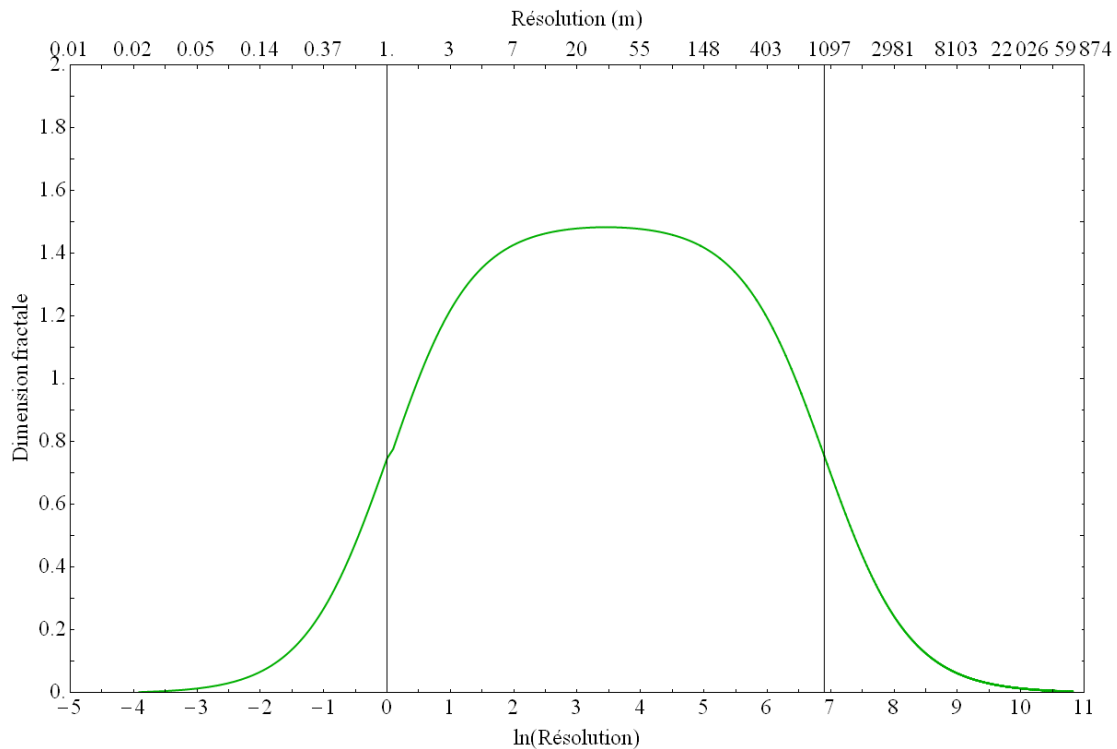
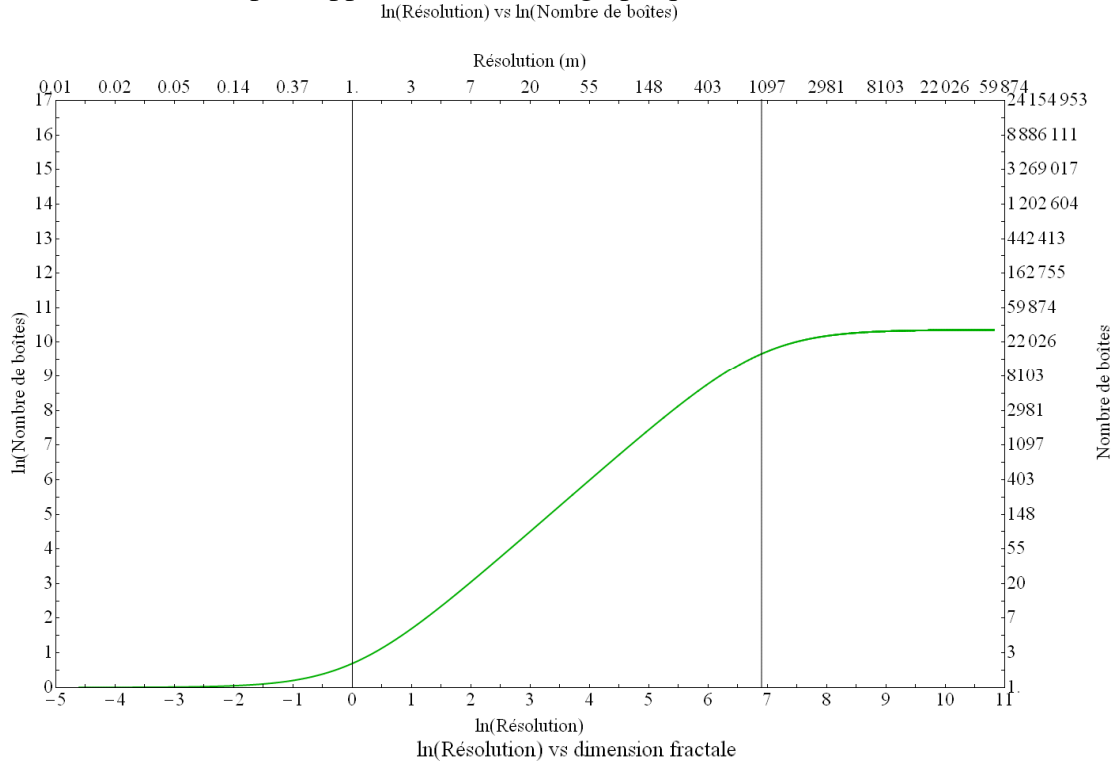
La dérivée montre trois zones : une zone non fractale ; une zone de transition centrée autour de 1 m ; une zone fractale.

Cas 3. Le modèle avec deux transitions : non fractal-fractal et fractal-non fractal

Équation différentielle : $\frac{dN}{d \ln \varepsilon} = a + bN + cN^2$

Solution : $N(\varepsilon) = N_0 \left[\frac{1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{-D}}{1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^{-D}} \right]$

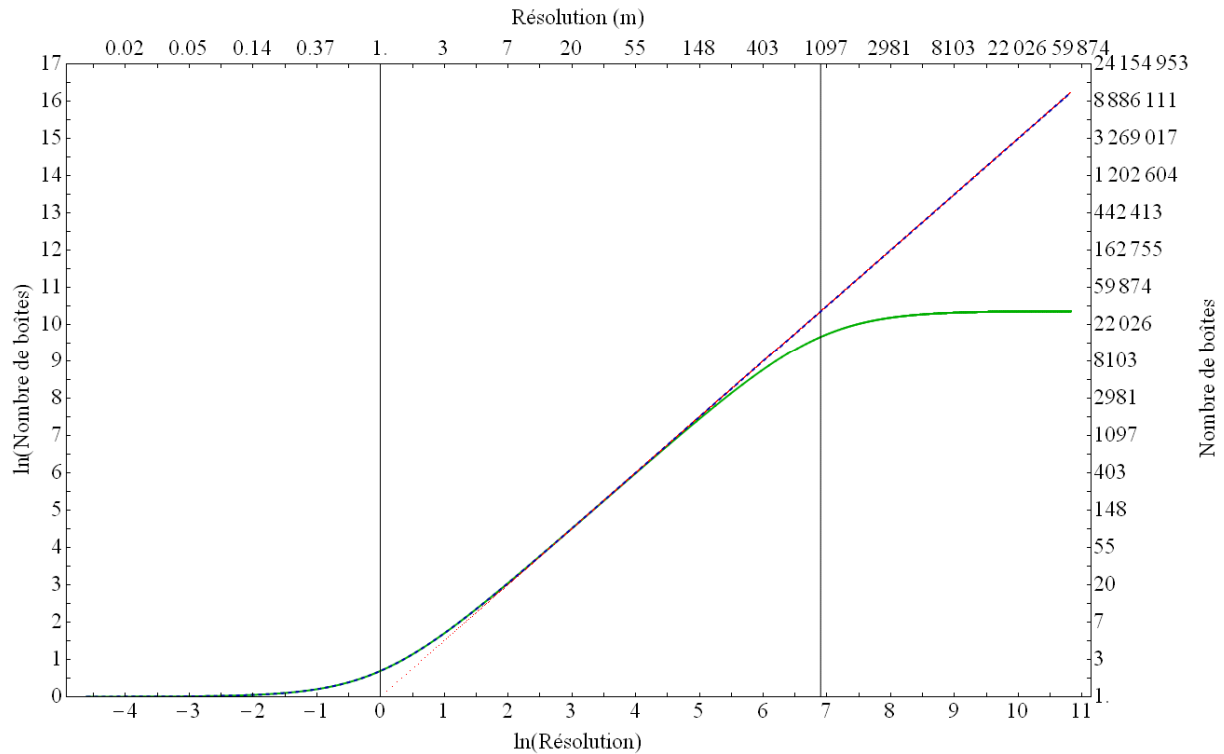
Un paramètre supplémentaire apparaît $\varepsilon_1 = 1\,000\text{ m}$ ($\ln(1\,000) \approx 6,9$) qui correspond à la seconde échelle de coupure apparaissant dans le graphique.



N.B. Outre les cinq zones (non fractale, transition, fractale, transition, non fractale), ce diagramme fait bien comprendre qu'il faut, pour effectuer un calcul, une gamme d'échelle très importante. Il suffit d'observer que le domaine fractal ne s'étend que de $\ln 3$ (20 m) à $\ln 4$ (55 m)

Synthèse des comptages de boîtes

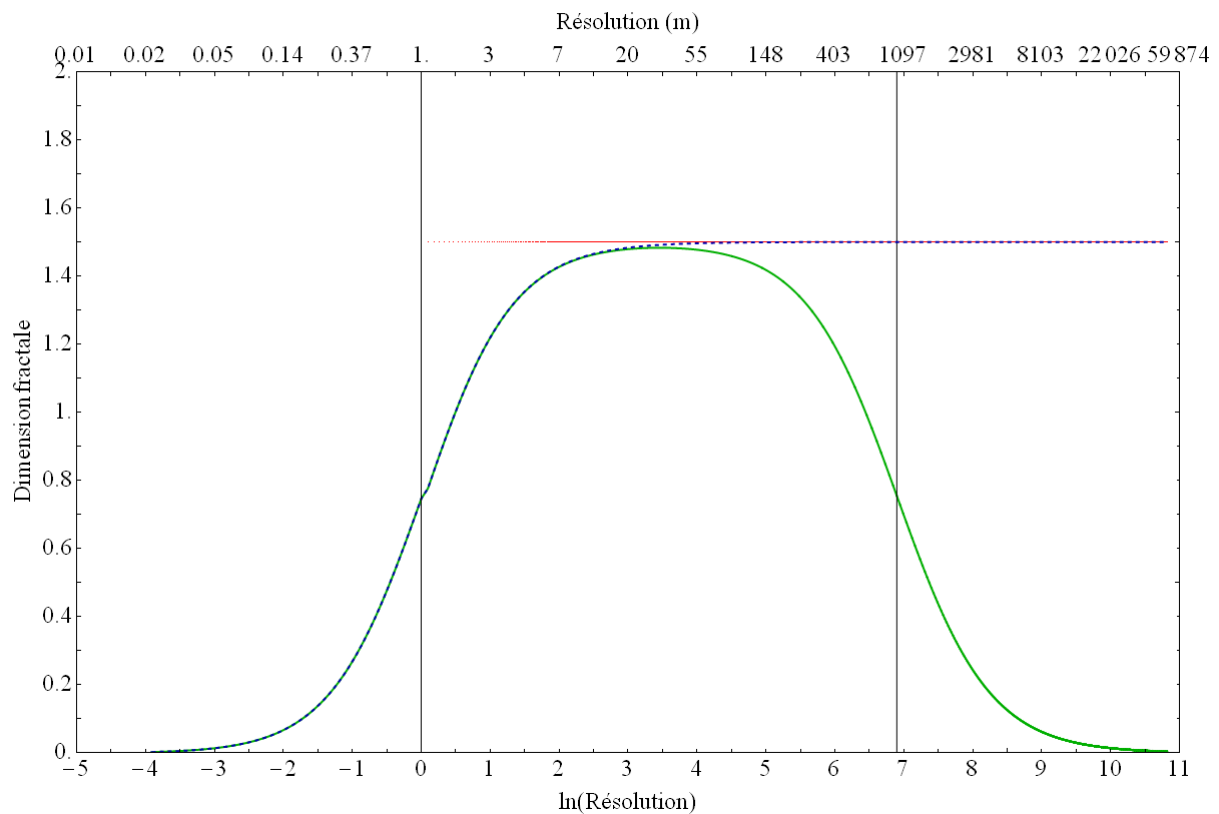
$\ln(\text{Résolution})$ vs $\ln(\text{Nombre de boîtes})$



Ce graphique montre comment il est facile de se tromper sur le choix du modèle si la gamme d'échelles analysée est très courte.

Synthèse des dérivées

$\ln(\text{Résolution})$ vs dimension fractale



N.B. 1. La superposition des dérivées montre que le graphique vert n'atteint même pas la dimension fractale fixée de 1,5. L'hypothèse précédente était donc partiellement fausse.

N.B. 2. Si les comptages de boîtes sont « absolus », les dérivées permettent le cas échéant de connecter différents calculs effectués sur un même objet ou un échantillon de celui-ci sur des gammes d'échelle différentes.