Exposé synthétique sur les lois rang – population urbaine

Maxime Forriez*

*UMR ESPACE – Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse,
74, rue Louis Pasteur – Case n°17, 84029 Avignon Cedex 1
maximeforriez@hotmail.fr

La construction des lois rang – population urbaine prend un sens nouveau et particulièrement profond à la lumière de la relativité d'échelle. Voici une note synthétique de ce que l'on peut en dire, en remarquant que toutes les lois rang – population urbaine connues en géographie se retrouvent dans un modèle mathématique parfaitement cohérent et qui, malgré quelques équations qui peuvent sembler difficiles, reste simple.

1. Le modèle classique : l'invariance d'échelle

Le modèle classique est très simple : il consiste à ajuster sur l'espace $\left(\frac{1}{r}, P\right)$ une loi puissance de la forme :

$$P = A\left(\frac{1}{r}\right)^D .$$

Dans ce cas, on se situe dans le cadre de l'invariance d'échelle de B. Mandelbrot, et on peut linéariser la loi puissance sous la forme d'une droite :

$$\ln P = \ln A + D \ln\left(\frac{1}{r}\right).$$

Cette dernière s'appelle loi de Zipf-Mandelbrot.

2. Le modèle parabolique : la dépendance d'échelle

Jean Laherrère (1996) a montré qu'un ajustement polynomial du second degré était plus pertinent, ce qui donne :

$$\ln P = a \ln^2\left(\frac{1}{r}\right) + b \ln\left(\frac{1}{r}\right) + c\,.$$

Ce polynôme pose bien des problèmes, si l'on reste dans le cadre Zipf-Mandelbrot puisque l'on ne peut pas dégager une pente constante.

Dans le cadre de la relativité d'échelle, le problème ne pose plus. La dimension fractale pouvant correspondre à une fonction et elle est définie comme étant la dérivée du ln *P* par rapport à $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$. On écrit donc sans complexe :

$$D = \frac{\mathrm{d} \ln P}{\mathrm{d} \ln\left(\frac{1}{r}\right)} = 2a \ln\left(\frac{1}{r}\right) + b$$

Ce résultat est impressionnant à plus d'un titre. D'une part, il correspond, dans le cadre multifractal, à une dimension d'information. D'autre part, les géographes peuvent reconnaître la loi de R. Gibrat (1931).

D'ailleurs, si on écrit la nouvelle loi puissance correspondante, on obtient une loi de Gibrat généralisée :

$$P = e^c \left(\frac{1}{r}\right)^{a \ln\left(\frac{1}{r}\right) + b}$$

En effet, pour obtenir la loi statistique de Gibrat classique, il suffit de poser :

$$\begin{cases} e^c = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-B^2} \\ a = -A^2 \\ b = -2AB \end{cases}$$

3. Le modèle parabolique log-périodique

Le modèle parabolique ne résout pas tout. On peut observer des oscillations autour de la loi puissance ajustée, oscillations qui peuvent être empiriquement modélisées par une loi log-périodique de la forme :

$$P = e^{c}\left(\frac{1}{r}\right)^{a\ln\left(\frac{1}{r}\right)+b}\left(1+\alpha\cos\left(\beta\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right).$$

4. Perspectives diachroniques

Le modèle temporel général serait le suivant. (1) Dans une première étape, la relation rang – population urbaine est classique. Elle correspond à une droite de régression en ln – ln. À partir des années 1970, cette droite n’a plus de sens ; un polynôme du second degré semble alors plus pertinent. À partir des années 2000, cette parabole se met à osciller de manière log-périodique.