Structures hiérarchiques en géographie : des modèles linéaires aux modèles non linéaires (lois puissances et corrections log-périodiques)

FORRIEZ M.[1], MARTIN Ph.[2]

1 : Université d'Avignon, case 17, 74 rue L. pasteur, 84029 Avignon cedex (maxime.forriez@wanadoo.fr); 2 : Université d'Avignon, UMR ESPACE 6012 du CNRS, case 17, 74 rue L. Pasteur, 84029 Avignon cedex (phmartin@club-internet.fr).

Mots clés : Géographie, fractale, invariance d'échelle, covariance d'échelle, dépendance d'échelle.

Bien que les structures hiérarchiques aient été identifiées depuis de très longues années et qu'elles touchent de nombreux champs de la connaissance (PARETO V., 1896, LEVY P., 1937, 1965, KORCAC J., 1940, ZIPF G.K., 1949, MANDELBROT B., 1975, SCHROEDER M., 1991, LAHERRÈRE J., 1996, BAK P., 1999, NOTTALE *et alii*, 2000, SORNETTE D., 2000, ZAJDENWEBER D., 2000) elles sont toujours restées un domaine de recherche riche et important. Au fil des siècles, elles sont apparues comme correspondant à une structure de plus en plus générale qu'exprime grossièrement la fameuse loi puissance. L'universalité de ce type de relation est en soi une question essentielle.

En géographie aussi l'ubiquité a été établie, par l'usage, et peut-être par l'abus de l'usage de la « loi » dite Rang / Taille issue des travaux de G. K. ZIPF (1949) sur la fréquence d'utilisation des mots de la langue anglaise. On rappellera ainsi pour mémoire les nombreuses recherches sur la structure hiérarchique du réseau urbain, local, national (GUERIN – PACE F., 1993) ou mondial (MORICONI – EBRARD F., 1993).

En conséquence le modèle plébiscité par la communauté des géographes correspond généralement à la loi puissance : $y = Ax^{\delta}$ (DAUPHINE A., 1995, p. 53-61), FRANKHAUSER P., 1994, PUMAIN D., 2006 ; PUMAIN D. et SAINT JULIEN Th., 2001, p.91 et suivantes), à quelques exceptions près.

Cette loi qui associe à une distribution empirique - celle de la variable étudiée - celle - théorique - du rang signifie que quelque chose s'organise comme l'inverse de quelque chose d'autre pour reprendre une expression de B. MANDELBROT (1975, p. 147-152). Rendant compte de la structure d'une distribution de niveaux d'une variable qui peut être, par exemple, la magnitude des tremblements de terre, il était logique qu'elle se trouve « englobée » et théorisée par la géométrie fractale, la géométrie de l'irrégulier et du fragmenté qui porte comme idée fondamentale sous jacente celle de l'invariance d'échelle. En d'autres termes la variation d'un rang à l'autre de la variable envisagée serait proportionnelle, voire constante, lorsque le rang, ou plutôt les rétro fréquences et les résultats de la mesure sont exprimés en logarithme.

Cette approche est évidemment statistique dans un cadre empirique alors qu'elle est déterministe pour des modèles fractals bien connus comme l'ensemble de Cantor.

Cela étant il est assez rapidement apparu que l'idée d'invariance d'échelle n'était pas suffisante et que la relation ne pouvait donc pas être seulement résumée par l'exposant du modèle puissance, et cela même si l'on considère la variation de la valeur de la pente de la relation (LEVY P., 1965 ; ZAJDENWEBER D., 2000).

Différents auteurs ont essayé de rendre compte au fond de ce qui apparaît comme étant des courbures, des oscillations lorsque l'on reporte les valeurs de la distribution empirique en fonction des niveaux des rétro fréquences. Une première tentative, que nous rappellerons pour mémoire, fut celle de B. MANDELBROT qui proposa de décaler le rang en introduisant, dans le modèle, un facteur supplémentaire (FRONTIER S, PICHOD - VIALE D., 1991, MARTIN Ph., 1996).

Une possibilité, plus intéressante, fut introduite par J. LAHERRÈRE (1996) qui proposa, sur la base d'une exploration empirique de phénomènes tant physiques qu'anthropiques, d'ajuster sur les logarithmes des deux distributions un modèle parabolique de la forme : $y = ax^2 + bx + c$ avec -a- le coefficient de courbure. Cette solution est remarquablement efficace et nous l'avons employée comme nous le verrons pour, en particulier, classer des accroissements de débits de sources karstiques du massif de la Sainte Baume (MARTIN Ph., 2003) ou pour envisager les chiffres d'affaire des entreprises industrielles et commerciales de France (MARTIN Ph., 2004, t1).

Dans ces essais il apparaît clairement que la dimension fractale exprimée ici par la pente entre deux points sur le graphique bi logarithmique varie et que nous ne sommes plus dans un cas d'invariance d'échelle mais dans une covariance d'échelle. Cette variation étant matérialisée par la courbure dont rend compte le coefficient de courbure.

Reste que dans certains cas la courbure est négative – la dimension fractale diminue des petites aux grandes échelles – et dans certains autres elle est positive – la dimension fractale augmente des petites échelles aux grandes échelles (MARTIN Ph., 2003, p187-191, 2004, t1, p.130-131). L'approche initiale de B. MANDELBROT n'est donc plus suffisante. Cette constatation peut déboucher sur des avancées en particulier pour la géographie dans la mesure où il existe une seconde définition, pour les fractales, proposée par le physicien L. NOTTALE dès les années 1980 (1984 ; 1993 pour une première synthèse de ses travaux).

Est fractal tout objet ou espace non différentiable - c'est-à-dire fortement irrégulier - continu qui dépend de l'échelle d'observation. Dans ce cadre, l'invariance d'échelle n'est qu'un cas très exceptionnel. En effet, l'invariance d'échelle stricte n'existe pas dans la nature. B. MANDELBROT l'avait lui-même indiqué dès 1975.

Toutefois on peut considérer l'usage de ce concept comme une étape préliminaire dans la définition des fractales que nous offre la nature. De ce fait, la proposition de L. NOTTALE apparaît beaucoup plus pratique pour la géographie.

Cela étant, la non différentiabilité de l'espace ne signifie pas que les grandeurs qui le composent soient non différentiables. C'est tout le contraire ! L. NOTTALE définit les lois classiques $y = Ax^{\delta}$ comme la solution d'une équation différentielle dite d'échelle. Ainsi, le principe de causalité qui semblait être mis à mal par la découverte des phénomènes chaotiques, est rétabli. Cependant, $y = Ax^{\delta}$ n'est solution que d'un modèle d'équation différentielle d'échelle du premier ordre, c'est-à-dire le modèle le plus simple, dans lequel $\delta = D - D_T$, où D est la dimension fractale constante et D_T la dimension topologique.

Cela étant, dans la plupart des cas empiriques, lorsqu'ils ont une gamme d'échelle suffisante (au moins sur 5 ordres de grandeur : 10^5), on observe une légère oscillation autour de la loi puissance. On peut la modéliser en posant une équation différentielle d'échelle du second ordre, et ainsi obtenir ce que l'on appelle une correction log-périodique.

Notre objectif est donc de présenter rapidement quelques distributions-tests bien connus en géographie (réseau urbain mondial par exemple) et d'autres en cours d'étude (site de Boves par exemple ; FORRIEZ M. MARTIN Ph., 2006) dans lesquelles une correction log-périodique apparaît clairement et de proposer une meilleure modélisation mathématique des phénomènes. Il faut insister sur le fait qu'il ne s'agit que d'une correction possible dans laquelle on exige que la dimension fractale reste constante.

Ceci implique que les ajustements paraboliques, sur les logarithmes des rétro fréquences (ou des rangs) *versus* ceux de la variable considérée, n'ont pas encore étaient intégrés dans un cadre théorique. L'approche ne pourra, dans ce cas, qu'être empirique tout en montrant que l'essentiel des efforts doit porter sur l'articulation de cet empirisme avec un corpus théorique en construction.

Bibliographie

BAK P., 1999, *Quand la nature s'organise*. Avalanches, tremblements de terre et autres cataclysmes. Flammarion éditeur, Paris, 283 p.

BOUVIER A., 1999, (sous la direction de), *Pareto aujourd'hui*, Presses universitaires de France éditeur, Paris, 325 p.

DAUPHINE, A., 1995, *Chaos, fractales et dynamiques en géographie*, Paris, Reclus, 136 p.

FORRIEZ M. et MARTIN Ph., 2006, De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelles de L. Nottale en géographie. Recherche d'un modèle scalaire spatio-temporel. *Géopoint 2006* : Demain la géographie, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, Brouillon Dupont, p.63-64.

FRANKHAUSER, P., 1994, *La fractalité des structures urbaines*. Anthropos Économica édition, Paris, 291 p.

FRONTIER S, PICHOD - VIALE D., 1991, *Écosystèmes. Structure - fonctionnement - évolution*. Masson éditeur, Paris, 392 p. 2éme édition, 1998, Masson, 447 p.

GUERIN – PACE F., 1993, *Deux siècles de croissance urbaine. La population des villes françaises de 1831 à 1990*. Editions Anthropos, coll.: Villes, Paris, 205 p.

KORCAK J., 1940, Deux types fondamentaux de distributions statistiques. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, vol.30, p.295-299.

LAHERRÈRE J., 1996, Distributions de type " fractal parabolique " dans la nature. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t.322, série IIa, p.535-541.

LEVY P., 1937, *Théorie de l'addition de variables aléatoires*. Gauthier Villard éditeur, Paris, 2e édition 1954, réimpression J. Gabay, Parsi, 416 p.

LEVY P., 1965, *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier Villard éditeur, Paris, 2e édition, réimpression J. Gabay, Paris, 224 p

MANDELBROT B., 1975, *Les objets fractals*, 1ère édition, Flammarion éditeur, Paris, et 1984, 2ème éd., Flammarion 203 p. et 1995, 4éme éd., Flammarion, coll.: Champ n°301, 208 p.

MARTIN, Ph., 1996. De l'organisation des formes superficielles et souterraines du massif karstique de la St Baume (B. du Rh, Var ; Fr.). *Ukpic* n°8, Université de Fribourg, Suisse, M. MONBARON et S. FIERZ éditeurs, p.45-64.

MARTIN Ph., 2003, Objectivation des formes en géographie et calculs d'indicateurs fractals. Exemples karstiques. *In* : *Objets et indicateurs géographiques* sous la direction de J. MABY, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p.153-268, 13 fig., 1 graphe. Texte en ligne sur les sites : http://www.umrespace.org et http://www.geo.univ-avignon.fr.

MARTIN Ph., 2004, Modélisation fractale et structurelle des formes en géographie. Réflexion développée à partir d'exemples karstiques. Habilitation à diriger les recherches. Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, tome 1, 173 p., tome 2, 314 p., tome 3, 176 p., 1 carte coul. ht.

MORICONI – EBRARD F., 1993, *L'urbanisation du Monde depuis 1950*, Anthropos éditeur, Paris, 372 p.

NOTTALE, L. et SCHNEIDER, J., 1984, Fractals and Non-Standard Analysis, *Journal of Mathematical Physics,* vol. 25, n°5,1296-1300.

NOTTALE, L., 1993, *Fractal space-time et microphysics. Towards a theory of scale relativity*, World scientific, Singapour, XIV-338 p.

NOTTALE L., CHALINE J., GROU P., 2000, *Les arbres de l'évolution*. Hachette, Paris, 379 p.

PARETO V., 1896, *Cours d'économie politique*. *In* PARETO Œuvres complètes. Réimpression Droz, Genève, 1965.

PUMAIN D., 2006, (sous la direction de), Hierarchy in natural and social sciences. Methodos series, vol.3, Springer éditeur, Berlin, 243 p.

PUMAIN D., SAINT-JULIEN Th., 2001, *Les interactions spatiales*. Armand Colin, Paris, 189 p

SCHROEDER M., 1991, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minute from an infinite paradis*, Feeman editor, New York, 429 p.

SORNETTE D., 2000, *Critical phenomena in natural sciences. Chaos, fractals, selforganization and disorder : concepts and tools*. Springer éditeur, 434 p.

ZAJDENWEBER D., 2000, *Économie des extrêmes*. Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, Paris, 218 p.

ZIPF G.K., 1949, *Human behaviour and principle of least effort*, Cambridge, MA: Addison-Wesley.